

Analiza matematyczna
Lista 3 (pochodna funkcji)

Z.1 Wyznaczyć z definicji pochodną funkcji w punkcie $x_0 \in D_f$:

a) $f(x) = 2x^2$, b) $f(x) = \sqrt{x}$, c) $f(x) = \ln x$, d) $f(x) = a^x$, e) $f(x) = \sin x$, f) $f(x) = \frac{1}{x}$

Z.2 Obliczyć pochodną funkcji:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, b) $f(x) = \ln x + x^{2007} + 3^x$, c) $f(x) = x \ln x + x^3 \sqrt{x} - 2x^7 \cos x$,

d) $f(x) = a^{x^8 - 7x^5 + 2x}$, e) $f(x) = \sin(\sqrt{x} + 3xe^x)$, f) $f(x) = \frac{2x + 1}{3x^2 + 1}$ g) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x}$

h) $f(x) = \sin(\sin x + 3 \cos x)$ i) $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{x + \sin^3 x}$ j) $f(x) = \frac{x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

k) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ l) $f(x) = x \operatorname{tg} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)^3$ m) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

n) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + e^{x^2}}}{\sqrt[3]{\sin x^3 + e^{-x^2}}}$ o) $f(x) = \sqrt[5]{\ln(\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x^2 + 1))}$ p) $f(x) = \arcsin \operatorname{tg}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$

r) $f(x) = \arcsin \operatorname{ctg} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)$ s) $f(x) = (1 + nx)^m (1 + mx)^n$ t) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

u) $f(x) = x^x, x > 0$ v) $f(x) = x^{x^x}, x > 0$ w) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$ x) $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$

y) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ z) $f(x) = a^x + x^{a^x} + a^{a^x} + a^{x^x}, a, x > 0$ ż) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Z.3 Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji w \mathbb{R}

a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = |x + 1| + |x^2 + 3x + 2|$, c) $f(x) = \ln|x - 3| + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x^2}$

d) $g(t) = |\sin^3 t|$ e) $g(t) = [t] \cdot \sin \pi t$ f) $g(t) = \arcsin \cos \frac{1}{|t|}$ g) $g(t) = \sqrt{(1 - 3t)^2} + \ln(e^t - e^{-t})$

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ i) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \ln(1 + x), & x \geq 0 \end{cases}$

Z.4 Dla jakich wartości parametrów a, b podane funkcje są ciągłe i różniczkowalne na \mathbb{R} ?

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 2 \\ ax + b, & x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x < -2 \\ 3 - x, & -2 \leq x < 3 \\ x^2 + x + b, & x \geq 3 \end{cases}$

Z.5 Dana jest funkcja $g(x) = 2x^6 - 6x^5 - 30x^4 + 70x^3 - 36x - 2$. Wykazać z twierdzenia Rolle'a, że w przedziale $(-2, 3)$ istnieje pierwiastek równania $g'(x) = 0$.

Z.6 Obliczyć, jaki kąt z osią OX tworzy styczna do krzywej $y = x^2 - 3x + 8$ w punkcie $x_0 = 1$.

Z.7 Znaleźć kąt przecięcia krzywych:

a) $y = 2$, $y = e^{\frac{1}{2}x}$ b) $x^2 + y^2 = 8$, $y = \sqrt{2x}$

Z.8 Wykazać, że następujące funkcje są funkcjami stałymi:

a) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$ b) $g(x) = 2 \arcsin x + \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$